

מבוא למערכות ומעגלים חשמליים : פתרון תרגיל בית מספר 12

1. א. עבור מערכת עם משוב יחידה וכניסת מהירות שגיאת המצב המתמיד היא:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{SG(s)}$$

מהנתון נקבל: $KG = 50G = \frac{250(1-S)}{S(S+10)}$ ולכן:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(S+10)}{250(1-S)} = \frac{10}{250 \cdot 1} = 0.04$$

ב. קטבים: $S = -10, 0$ אפסים: $S = +1$.

אסימפטוטות: קוטב אחד הולך לאפס באחד והשני הולך לאין סוף עם אסימפטוטה בזווית 180 מעלות (מקבילה לציר הממשי, ולא חותכת אותו).

ה RL נמצא על הציר הממשי בנקודות: $-10 \leq S \leq 0$ & $S \geq 1$.

נקודות השבירה של ה RL מהציר הממשי: נשתמש בכלל הנגזרת-

$$\begin{aligned} \text{ונקבל: } \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{G(S)} \right) = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dS} \left(\frac{S(S+10)}{5(1-S)} \right) = 0 \\ \frac{-(S^2 - 2S - 10)}{5(1-S)^2} = 0 &\Rightarrow S^2 - 2S - 10 = 0 \\ S_{1,2} = 4.316, -2.316 \end{aligned}$$

אין קטבים מרוכבים.

הציר סימטרי ביחס לציר הממשי.

הנקודות בהם ה RL חותך את הציר הדמיוני: אפשר לחשב בעזרת כלל הגודל וכלל הפאזה- נציב בכלל הפאזה $S=j\omega$ ונקבל:

$$G(j\omega) = \frac{5(1-j\omega)}{j\omega(j\omega+10)} \Rightarrow \angle G(j\omega) = 0 + \text{tg}^{-1}(-\omega) - \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) = \pi + 2\pi n$$

$$\Rightarrow \text{tg}^{-1}(-\omega) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$$

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg}(a) - \text{tg}(b)}{1 + \text{tg}(a)\text{tg}(b)} \Rightarrow \infty = \frac{-\omega - \frac{\omega}{10}}{1 - \frac{\omega^2}{10}} \Rightarrow \omega^2 = 10$$

$$\omega = \pm 3.16$$

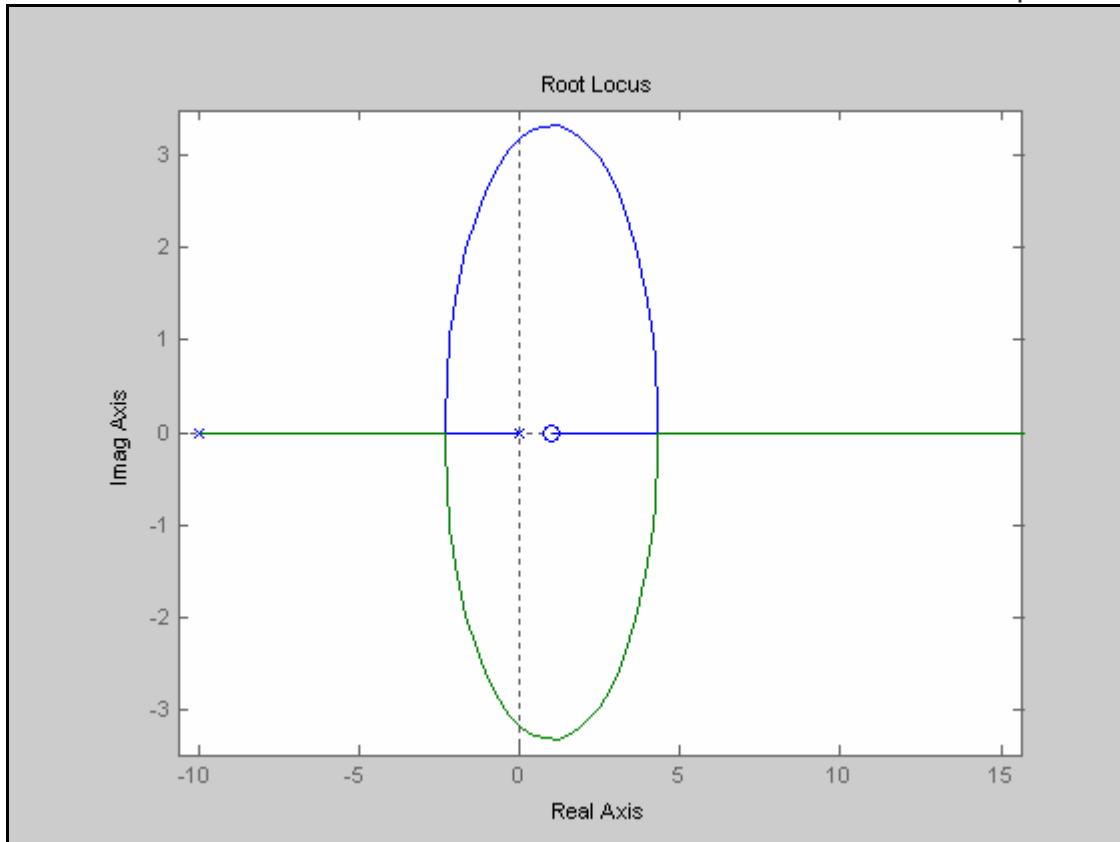
נציב בכלל האמפליטודה $S=j\omega$ ונקבל:

$$|G(j\omega)| = 5 \sqrt{\frac{1+\omega^2}{\omega^4+100\omega^2}} = \frac{1}{K}$$

נציב: $\omega^2 = 10$ ונקבל:

$$\frac{1}{K} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow K = 2$$

ובסה"כ קיבלנו:



ההגבר $K=50$ גדול מ- K הקריטי ולכן המערכת לא יציבה.

2. א. השגיאה בחוג סגור עבור כניסה כללית היא: $E(S) = R(S) \cdot \frac{1+GH-G}{1+GH}$.

ובמישור הזמן, במצב מתמיד: $e_{ss}(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} SE(S)$. ולכן, עבור כניסת מדרגה נקבל:

$$e_{ss}(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S}{S} \cdot \frac{1+GH-G}{1+GH}$$

עבור המערכת שלנו: $GH = \frac{10(S+2)}{S(S+5)}$ $G = \frac{10}{S+5}$ $1+GH = \frac{S^2+15S+20}{S(S+5)} \Leftarrow$

$$1+GH-G=\frac{S^2+5S+20}{S(S+5)}\Rightarrow$$

$$\frac{1+GH-G}{1+GH}=\frac{S^2+5S+20}{S^2+15S+20}\Rightarrow e_{ss}(t\rightarrow\infty)=\frac{20}{20}=1$$

ב. ראינו בשיעור ש:

$$e_{ss}(t\rightarrow\infty)=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{S\cdot X(S)}{1+G(S)}=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{1}{S}\frac{S+1}{S+8}\cdot\frac{1}{1+\frac{S+2}{S(S+5)}}\Rightarrow$$

$$\lim_{s\rightarrow 0}\frac{1}{S}\frac{S+1}{S+8}\cdot\frac{1}{\frac{S(S+5)+S+2}{S(S+5)}}=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{1}{S}\frac{S+1}{S+8}\frac{S(S+5)}{(S^2+6S+2)}=\frac{1\cdot 5}{8\cdot 2}=\frac{5}{16}$$

זוהי מערכת type 1 .

ג. באותו האופן :

$$e_{ss}(t\rightarrow\infty)=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{S\cdot X(S)}{1+G(S)}=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{1}{S}\frac{S+1}{S+8}\cdot\frac{1}{1+\frac{S+2}{S^2(S+5)}}\Rightarrow$$

$$\lim_{s\rightarrow 0}\frac{1}{S}\frac{S+1}{S+8}\cdot\frac{1}{\frac{S^2(S+5)+S+2}{S^2(S+5)}}=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{1}{S}\frac{S+1}{S+8}\frac{S^2(S+5)}{(S^3+5S^2+S+2)}=0$$

זוהי מערכת type 2 .

3. א. עבור המערכת: $K\cdot G(S)=\frac{K(S+1)}{S(S-1)(S^2+10S+74)}$, ידוע שהמערכת היא

מסוג type 1 (קוטב אחד ב $S=0$), בעלת משוב יחידה, ושהכניסה היא כניסת מהירות

$$e_{ss}(t \rightarrow \infty) = \frac{A}{(K \prod Z_i / \prod p_k)} = \frac{\prod p_k}{K \prod Z_i} \quad \text{ולכן אפשר להשתמש בקשר:}$$

האפסים של המערכת הם: -1
 הקטבים של המערכת (מלבד הקוטב באפס) הם: +1

$$\frac{-10 \pm \sqrt{100 - 296}}{2} = \frac{-10 \pm 14j}{2} = -5 \pm 7j$$

ולכן נקבל:

$$\left| \frac{\prod p_k}{K \prod Z_i} \right| = \left| \frac{1 \cdot (-5 + 7j)(-5 - 7j)}{K(-1)} \right| = \frac{74}{K} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$K = 296$$

ב. השגיאה בחוג פתוח היא : $E(S) = R(S)[1 - G(S)]$. ולכן, אפשר לחשב את שגיאת המצב המתמיד לפי:

$$e_{ss}(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S}{S^2} [1 - KG(S)] =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{S} \left[1 - \frac{296(S+1)}{S(S-1)(S^2+10S+74)} \right] = -\infty$$

כלומר השגיאה היא אין סופית עבור כל K !