

14/11/2004

מבוא למערכות ומעגלים חשמליים : פתרון תרגיל בית מספר 5

1. בשלב הראשון נתמיר את שני האגפים למישור לפלס:

$$L\{y''+9y\} = S^2Y(S) - y(0)S - y'(0) + 9Y(S) = S^2Y(s) - 3S + 1 + 9Y(s)$$

$$L\{18u(t)\} = \frac{18}{S} \Rightarrow$$

$$Y(S)[S^2 + 9] = 3S - 1 + \frac{18}{S} = \frac{S(3S - 1) + 18}{S} = \frac{3S^2 - S + 18}{S} \Rightarrow$$

$$Y(S) = \frac{3S^2 - s + 18}{S(S^2 + 9)}$$

כעת נפרק את $Y(s)$ לשברים חלקיים:

$$\frac{3S^2 - s + 18}{S(S^2 + 9)} = \frac{A}{S} + \frac{BS + C}{S^2 + 9} = \frac{(A+B)S^2 + DS + 9A}{S(S^2 + 9)} \Rightarrow$$

$$A + B = 3 \Rightarrow B = 3 - A = 1$$

$$D = -1$$

$$9A = 18 \Rightarrow A = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3S^2 - s + 18}{S(S^2 + 9)} = \frac{2}{S} + \frac{S-1}{S^2 + 9}$$

$$L\{\cos(\omega t)\} = \frac{S}{S^2 + \omega^2}, L\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{S^2 + \omega^2} : \text{כעת נשתמש בקשרים הבאים}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{S} + \frac{S-1}{S^2 + 9}\right\} = (2 + \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t)) \cdot u(t) : \text{ונקבל:}$$

2. ראשית יש לפרק את הביטוי:

$$\frac{1}{s^3 - a^3} = \frac{1}{(s^2 + as + a^2) \cdot (s - a)} = \frac{As + C}{s^2 + as + a^2} + \frac{B}{s - a}$$

$$B = \frac{1}{(s^2 + as + a^2) \cdot (s - a)} \cdot (s - a) \Big|_{s=a} = \frac{1}{3a^2}$$

$$\frac{(As+C) \cdot (s-a) + B(s^2+as+a^2)}{(s^2+as+a^2) \cdot (s-a)} = \frac{1}{(s^2+as+a^2) \cdot (s-a)}$$

$$\Rightarrow As^2 + (C - aA)s - aC + Bs^2 + aBs + Ba^2 = 1$$

ע"י השוואת חזקות בשני האגפים

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B = -\frac{1}{3a^2}$$

$$C - aA + aB = 0 \Rightarrow C = a(A - B) = -2aB = -\frac{2}{3a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^3 - a^3} = \frac{1/3a^2}{s-a} + \frac{-s/3a^2 - 2/3a}{s^2 + as + a^2} \quad s^2 + as + a^2 = (s + a/2)^2 + 3a^2/4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^3 - a^3} = \frac{1/3a^2}{s-a} - \frac{1}{3a^2} \left[\frac{s+a/2}{(s+a/2)^2 + 3a^2/4} + \frac{\sqrt{3}/2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{(s+a/2)^2 + 3a^2/4} \right]$$

עפ"י טבלת התמרת לפלס ותכונת ההזזה בתדר:

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3 - a^3} \right\} = -\frac{1}{3a^2} \left[-e^{at} + e^{-at/2} \cos(\sqrt{3}at/2) + \sqrt{3}e^{-at/2} \sin(\sqrt{3}at/2) \right]$$

3. בתור התחלה נשם לב שאפשר לכתוב את הביטוי כך:

$$\frac{S^3 + S^2 + 1}{S^5 + S^3} = \frac{S^3 + S^2 + 1}{S^3(S^2 + 1)} = \frac{CS^2 + DS + E}{S^3} + \frac{AS + B}{S^2 + 1}$$

$$\frac{CS^2 + DS + E}{S^3} + \frac{AS + B}{S^2 + 1} = \frac{(CS^2 + DS + E)(S^2 + 1) + S^3(AS + B)}{S^3(S^2 + 1)} =$$

$$\frac{(A+C)S^4 + (B+D)S^3 + (C+E)S^2 + DS + E}{S^3(S^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$A + C = 0 \Rightarrow A = -C = 0$$

$$B + D = 1 \Rightarrow B = 1 - D = 1$$

$$C + E = 1 \Rightarrow C = 1 - E = 0$$

$$D = 0$$

$$E = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S^3} + \frac{1}{S^2 + 1}$$

עת אפשר לכתוב:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{S^{n+1}} \Rightarrow L\{t^2\} = \frac{2}{S^3}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{S^3 + S^2 + 1}{S^5 + S^3}\right\} = \left(\sin(t) + \frac{1}{2}t^2\right)u(t) \text{ ונקבל:}$$

4. נפרק לשברים בצורה הבאה:

$$i(S) = \frac{A}{S+1} + \frac{BS+C}{S^2+4} = \frac{A(S^2+4) + (S+1)(BS+C)}{(S+1)(S^2+4)} = \frac{AS^2 + 4A + BS^2 + BS + CS + C}{(S+1)(S^2+4)} =$$

$$\frac{(A+B)S^2 + (B+C)S + (4A+C)}{(S+1)(S^2+4)} \Rightarrow$$

$$A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B$$

$$B + C = 0 \Rightarrow C = -B$$

$$4A + C = 14 \Rightarrow 4(1 - B) - B = 14 \Rightarrow 4 - 5B = 14 \Rightarrow B = -2$$

$$A = 1 + 2 = 3$$

$$C = +2$$

$$\Rightarrow i(S) = \frac{3}{S+1} + \frac{-2S}{S^2+4} + \frac{2}{S^2+4}$$

$$i(t) = [3e^{-t} - 2\cos(2t) + \sin(2t)]u(t) \text{ ולכן, ע"י שימוש בטבלאות נקבל:}$$