

07/04/2005

מבוא למערכות ומעגלים חשמליים : פתרון תרגיל בית מספר 6

1. א. נמצא קודם את האדמיטנס של המעגל: שלושת האלמנטים מחוברים במקביל ולכן:

$$Y = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C_0 \left(1 - \frac{a}{\omega}\right) = j\omega \left(C_0 \left(1 - \frac{a}{\omega}\right) - \frac{1}{L\omega^2}\right) + G =$$
$$G + j\omega \left(\frac{-1 + C_0(\omega - a)\omega L}{L\omega^2}\right) = G + \frac{j}{\omega L} (C_0 L \omega^2 - a C_0 L \omega - 1)$$

כדי למצוא את תדר התהודה החדש נרצה לאפס את החלק המדומה של האדמיטנס:

$$C_0 L \omega^2 - a C_0 L \omega - 1 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{a}{\omega_0^2} \omega - 1 = 0 \Rightarrow \omega_0^2$$
$$\omega^2 - a\omega - \omega_0^2 \Rightarrow$$
$$\omega_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{401}}{2} = \underline{10.51}, -9.51$$

ב. נשתמש שוב באדמיטנס שמצאנו בסעיף הקודם: מכיוון שכל האלמנטים מחוברים במקביל:

$$V_C = V = \frac{I_{in}}{Y} = I_{in} \Rightarrow I_C = j\omega C \cdot V_C = I_{in} \frac{j\omega C}{Y} \Rightarrow$$

$$V_C = I_{in} \frac{j\omega^2 L C_0 \left(1 - \frac{a}{\omega}\right)}{\omega L G + j C_0 L \omega^2 - j a L C_0 \omega - j} = I_{in} \frac{j\omega^2 \left(1 - \frac{a}{\omega}\right)}{G L \omega_0^2 \omega + j[\omega^2 - a\omega - \omega_0^2]} =$$

$$I_{in} \frac{j100(1-0.1)}{1000 + j[100-100-1 \cdot 10]} = (5 \angle 0^\circ) \frac{90j}{1000-10j} \Rightarrow$$

$$Amplitude: 5 \times 90 / \sqrt{1000^2 + 10^2} = 0.45$$

$$Phase: tg^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = 90^\circ, tg^{-1}\left(\frac{-10}{1000}\right) = -0.57^\circ \Rightarrow \angle = 90 + 0 + 0.57 = 90.57$$

$$\Rightarrow I_C = (0.45 \angle 90.57^\circ) = 0.45 \cos(10t + 90.57^\circ)$$

2. א. נגדיר, בתור התחלה, את העכבות הבאים:

$$Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C} = 1000 - j/C$$

$$Z_2 = R_1 \parallel \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{10000}{1 + j10} = \frac{10000(1-10j)}{1+100} = 99(1-10j)$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = 1099 - j(\frac{1}{C} + 990) \quad I = \frac{V_{in}}{Z} = \frac{(10\angle 0^\circ)}{1099 - j(\frac{1}{C} + 990)}$$

כעת נחשב את שני המתחים בעזרת מחלק מתח :

$$V_1 = IZ_2 = \frac{990(1-10j)}{1099 - j(\frac{1}{C} + 990)} \Rightarrow \angle V_1 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{-10}{1}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{C} + 990}{-1099}\right)$$

$$V_2 = I(Z_2 + \frac{1}{jC \cdot 1}) = \frac{10 \cdot (99 - 990j - j\frac{1}{C})}{1099 - j(\frac{1}{C} + 990)} = \frac{10(99 - j(990 + \frac{1}{C}))}{1099 - j(\frac{1}{C} + 990)} \Rightarrow$$

$$\angle V_2 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{990 + \frac{1}{C}}{-99}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{C} + 990}{-1099}\right)$$

ב. כעת נתון ש: $\angle V_2 - \angle V_1 = 180^\circ$, נחשב את C שייתן לנו את הפרש הפאזה הנ"ל:

$$\angle V_2 - \angle V_1 = \left(\text{tg}^{-1}\left(\frac{990 + \frac{1}{C}}{-99}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{C} + 990}{-1099}\right) \right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{-10}{1}\right) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{C} + 990}{-1099}\right) =$$

$$- \text{tg}^{-1}(-10) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{990 + \frac{1}{C}}{-99}\right) = 180^\circ \Rightarrow 84.29^\circ + \text{tg}^{-1}\left(\frac{990 + \frac{1}{C}}{-99}\right) = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\text{tg}^{-1}\left(\frac{990 + \frac{1}{C}}{-99}\right) = 95.71^\circ \Rightarrow \frac{990 + \frac{1}{C}}{-99} = \text{tg}(95.7) = -10.001 \Rightarrow 990.1 = 990 + \frac{1}{C} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C} = 0.1 \Rightarrow C = 10F$$

$$\begin{aligned}
 Z(j\omega) &= (1\Omega) \parallel (0.5F) + (4\Omega) \parallel (2H) = \\
 &= \frac{1 \bullet 1/(j\omega \bullet 0.5)}{1 + 1/(j\omega \bullet 0.5)} + \frac{4 \bullet j\omega \bullet 2}{4 + j\omega \bullet 2} = \\
 &= \frac{1}{(j\omega \bullet 0.5) + 1} + \frac{j\omega \bullet 4}{2 + j\omega} = \\
 &= \frac{2 + j\omega \bullet 4}{2 + j\omega} \Rightarrow \\
 |Z| &= \frac{\sqrt{4 + 16\omega^2}}{\sqrt{4 + \omega^2}} \quad \varphi_z = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{4\omega}{2}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)
 \end{aligned}$$

ב. נציב את התדרים המבוקשים:

$$Z(\omega=0) = \frac{2+0}{2+0} = 1\Omega$$

וקל לראות, כי בתדר 0 הסליל הוא קצר, והעכבה היא זו של הנגד של 1Ω .

$$\begin{aligned}
 Z(\omega=1) &= \frac{2+4j}{2+j} = \frac{(2+4j) \cdot (2-j)}{(2+j) \cdot (2-j)} = \frac{4-2j+8j+4}{4+1} = \\
 &= \frac{8+6j}{5} = \frac{\sqrt{8^2+6^2}}{5} \angle \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) = 2 \angle 36.9^\circ [\Omega]
 \end{aligned}$$

האימפדנס הוא פשוט הנגד של 4Ω . , כלומר: הקבל הוא קצר והסליל הוא נתק ולכן $Z(\omega \rightarrow \infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{2+j4\omega}{2+j\omega} = \frac{j4\omega}{j\omega} = 4\Omega$

4. א. עבור המעגל השמאלי: נחשב את העכבות במישור לפלס

$$\begin{aligned}
 V_{out} &= IR = R \frac{V_{in}}{Z(s)} \quad Z(s) = R + \frac{1}{sC} \Rightarrow \\
 V_{out} &= V_{in} \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sCR}{sCR + 1} \Rightarrow H_1(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{sCR}{sCR + 1}
 \end{aligned}$$

ועבור המעגל הימני:

$$\begin{aligned}
 V_{out} &= I \frac{1}{sC} = \frac{1}{sC} \cdot \frac{V_{in}}{Z(s)} \quad Z(s) = R + \frac{1}{sC} \Rightarrow \\
 V_{out} &= V_{in} \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sCR + 1} \Rightarrow H_2(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{sCR + 1}
 \end{aligned}$$

ב. כעת נבחן את פונקציות התמסורת בגבולות הנתונים:

$$H_1(S) = \lim_{SCR \ll 1} \frac{SCR}{SCR+1} \cong \frac{SCR}{1} = SCR$$

$$H_2(S) = \lim_{SCR \gg 1} \frac{1}{SCR+1} \cong \frac{1}{SCR} = \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{RC}$$

מסקנה: לפי התכונות של התמרת לפלס, פונקצית התמסורת הראשונה היא מעגל גזירה
 עם הגבר של RC , ופונקצית התמסורת השנייה היא אינטגרטור עם
 הגבר של $\frac{1}{RC}$.

5. א. נמצא קודם כל את העכבה של כל המעגל:

$$Z_{in} = R + SL + Z_{C1} \parallel Z_{C2} = R + SL + \frac{1}{SC_1} + \frac{1}{SC_2} = \frac{C_1 + C_2 + SC_1C_2(R + SL)}{SC_1C_2} =$$

$$\frac{C_1 + C_2 + SC_1C_2R + S^2LC_1C_2}{SC_1C_2} = \frac{6 + 80S + 26S^2}{8S}$$

ולכן הזרם הכולל מעגל הוא: $I = \frac{V_{in}}{Z_{in}} = \frac{V_{in} \cdot 8S}{6 + 80S + 26S^2}$, את הזרם על $C2$ אפשר לחשב ע"י

$$I_{C2} = I \frac{\frac{1}{C_1S}}{\frac{1}{C_1S} + \frac{1}{C_2S}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} I = \frac{2}{3} I$$

חלוקת זרם לפי העכבות של שני הקבלים:

$$I_{C2} = \frac{2}{3} I = \frac{16}{3} \cdot \frac{V_{in} \cdot S}{6 + 80S + 26S^2} \Rightarrow H(s) = \frac{I_{C2}}{V_{in}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{S}{6 + 80S + 26S^2}$$

ונקבל:

ב. מציאת משוואה דיפרנציאלית:

$$[6 + 80S + 26S^2] \cdot I_{C2} = \frac{16}{3} S \cdot V_{in}$$

בתכונת הגזירה בזמן של התמרות לפלס:

$$6i(t) + 80i'(t) + 26i''(t) = \frac{16}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} \cos^2(3t) \right) = -\frac{16 \cdot 3}{3 \cdot 3} 2 \cos(3t) \sin(3t) = -\frac{16}{3} \sin(6t) \Rightarrow$$

$$6i(t) + 80i'(t) + 26i''(t) = -\frac{16}{3} \sin(6t)$$

ג. עבור תנאי התחלה אפס: נמיר שוב את המשוואה למישור לפלס:

$$I(s)[6+80S+26S^2]=\frac{-16}{3}\frac{6}{S^2+36}=\frac{-32}{S^2+36}\Rightarrow I(s)=\frac{-32}{[S^2+36]\cdot[6+80S+26S^2]}$$

$$=\frac{-32}{(S^2+36)\cdot 26\cdot (S+3)(s+\frac{1}{13})}=\frac{-32}{26}\left[\frac{A}{S+3}+\frac{B}{S+\frac{1}{13}}+\frac{C\cdot S+D}{S^2+36}\right]\longrightarrow$$

נחלץ את המקדמים A B C D ונקבל:

$$I_{c_2}(S)=0.00233\frac{S}{S^2+36}+0.027\frac{1}{S^2+36}-0.017\frac{1}{S+\frac{1}{13}}-0.00935\frac{1}{S+3}$$

$$\Rightarrow i_{c_2}(t)=[0.00233\cos(6t)+0.0045\sin(6t)-0.017e^{-t/13}-0.00935e^{-3t}]\cdot u(t)$$